6-10-14.

Μετατροπή από δεκαδικό σε άλλο σύστημα.

Ακέραιοι: $(x)_{10} = a_0 + b(a_1 + \beta(a_2 + b(\dots)\dots)$

Το a_0 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $x : \beta$.

Το a_1 -ΙΙ- -ΙΙ- -ΙΙ- $\left(\frac{x}{b}\right) : b$, $\frac{x}{\beta}$ πηλίκο της $x : b$

κ.ο.κ.

◇ $x = (194)_{10}$ να μετατραπεί στο πενταδικό.

	υπόλοιπο	πηλίκο
194:5	4	38
38:5	3	7
7:5	2	1
1:5	1	0

$(194)_{10} = (1\,2\,3\,4)_5$

Κλάσμα $(x)_{10} = (\pm \dots d_1 d_2 \dots)_b$

$x \cdot b = \underbrace{d_1}_{\text{ακέραιο}} + \underbrace{.d_2 d_3 \dots}_{\text{πραγματικό}}$ $\Big\}$ $d_2 d_3 \dots \; xb = d_2 + .d_3 \dots$

◇ Να μετατραπεί ο $x=(0.71875)_{10}$ στο δυαδικό

Ακέραιο μέρος - κλασματικό μέρος.

$x \cdot 2 = 1.4375$	1	$y_1 = .4375$
$y_1 \cdot 2 = 0.875$	0	$y_2 = .875$
$y_2 \cdot 2 = 1.75$	1	$y_3 = .75$
$y_3 \cdot 2 = 1.5$	1	$y_4 = .5$
$y_4 \cdot 2 = 1.0$	1	$y_5 = 0$

$(0.71875)_{10} = (.10111)_2$

◇ $(0.10)_{10}$ να μετατραπεί στο δυαδικό.

Ακέραιο μέρος - κλασματικό μέρος

$x \cdot 2 = 0.2$	0	$y_1 = 0.2$
$y_1 \cdot 2 = 0.4$	0	$y_2 = 0.4$
$y_2 \cdot 2 = 0.8$	0	$y_3 = 0.8$
$y_3 \cdot 2 = 1.6$	1	$y_4 = 0.6$
$y_4 \cdot 2 = 1.2$	1	$y_5 = 0.2$

$(0.1)_{10} = (0.0001100110011\ldots)_2 = (0.0\overline{0011})_2$

Σημείωση:
Επειδή το y_1 με το y_5 ταυτίζονται έπεται ότι τα κλασματικά μέρη θα επαναλαμβάνονται, επομένως ο αριθμός είναι περιοδικός

Παράσταση αριθμών κινητής υποδιαστολής
Κάθε μη μηδενικός πραγματικός αριθμός παριστάνεται ως
$\pm . d_1 d_2 d_3 \ldots \times b^e$, όπου $d_1 \neq 0$.

Παράδειγμα : $\pi \simeq 3.14159 = .314159 \times 10^1$

Παράσταση αριθμών κινητής υποδιαστολής στο σύνολο αριθμών μηχανής
Ένα σύνολο αριθμών μηχανής χαρακτηρίζεται από 4 στοιχεία

1) Τη βάση β, 2) Το πλήθος ψηφίων (t) του κλασματικού μέρους.

t: σημαντικά ψηφία

3) L ο ελάχιστος ακέραιος της δύναμης του β.

4) U ο μέγιστος -||- -||- του β.

$\boxed{L \leq e \leq U}$, συνήθως $\boxed{U \simeq -L}$

Το σύνολο αριθμών μηχανής συμβολίζεται με $M = M(\beta, t, L, U)$ και είναι πεπερασμένο.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το σύνολο αριθμών μηχανής $M = M(2, 3, -2, 2)$

$x = \pm .d_1d_2d_3 \times 2^e$, όπου $d_1 = 1$, $-2 \leq e \leq 2$. Θα βρούμε τους θετικούς αριθμούς μηχανής.

Ο μικρότερος απόλυτα αριθμός είναι ο $.\underset{1}{d_1}00 \times 2^{-2} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

Ο μεγαλύτερος απόλυτα αριθμός είναι ο $.111 \times 2^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 4 = 2 + 1 + \frac{1}{2} = 3.5$

→ $e = -2$: $\overset{100}{.1} \times 2^{-2} = \frac{1}{8}$, $.101 \times 2^{-2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$

$.110 \times 2^{-2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$, $.111 \times 2^{-2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$

→ $e = -1$: $.100 \times 2^{-1} = \frac{1}{4}$, $.101 \times 2^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

$.110 \times 2^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, $.111 \times 2^{-1} = \frac{7}{16}$

→ $e = 0$: $.100 \times 2^0 = \frac{1}{2}$, $.101 \times 2^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, $.110 \cdot 2^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$.111 \times 2^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

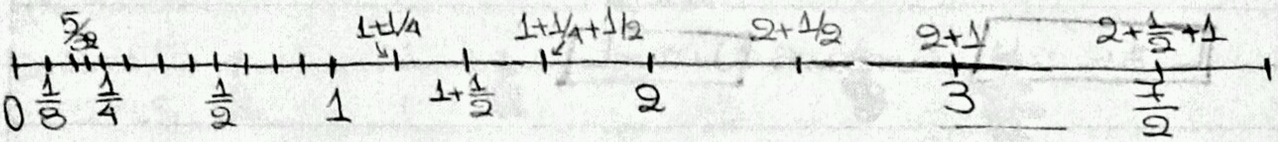
→ $e = 1$: $.100 \times 2^1 = 1$, $.101 \times 2^1 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, $.110 \times 2^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

$.111 \times 2^1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$\rightarrow e=2$: $\cdot 100\times 2^2 = 2$, $\cdot 101\times 2^2 = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, $\cdot 110\times 2^2 = 2+1 = 3$

$\cdot 111\times 2^2 = 2+1+\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Διάταξη στην πραγματική ευθεία.



Έστω ο αριθμός $x = q\times\beta^k$, $.1000 \le q \le .d_1d_2\ldots d_i \simeq 1$, όπου $d_i = \beta-1$, $L \le k \le U$.

Αν x δεν είναι αριθμός μηχανής στρογγυλεύεται και αποθηκεύεται ο $fl(x)$

Εκτίμηση απόλυτου σχετικού σφάλματος: Έστω x' ο αμέσως μικρότερος του x αριθμός μηχανής και x'' ο αμέσως μεγαλύτερος.

Το απόλυτο σχετικό σφάλμα είναι: $|\varepsilon| = \left|\frac{fl(x)-x}{x}\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{x''-x'}{x}\right|$ ★

(μόνο στη στρογγύλευση το βάζω· όχι στην αποκοπή.)

$x' = .d_1d_2\ldots d_t\times\beta^k$; $x'' = (.d_1d_2\ldots d_t+\beta^{-t})\beta^k$; $x''-x' = \beta^{k-t}$

$|x| \ge \cdot 1\times\beta^{-k} = \beta^{k-1}$

★ $\le \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta^{k-t}}{\beta^{k-1}} = \frac{1}{2}\cdot\beta^{1-t} = u$

$\frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4} = 2^{-2} = 2^{1-3}$

$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} = 2^{1-3}$

Το σύνολο αριθμών μηχανής δεν είναι σώμα, θα ήταν, αν ήταν αναλλοίωτο ως προς τις πράξεις.

$\cdot 1\times 2^2 + \cdot 1\times 2^{-1} = \cdot 1\times 2^2 + 0.001\times 2^2 = \cdot 1001\times 2^2$

δεν είναι αριθμός μηχανής.

$\cdot 1\times 2^{-2}\times\cdot 1\times 2^{-2} = 2^{-6} = 2^{-5}\times\cdot 1$, δεν είναι αριθμός μηχανής, διότι $-5 < L = -2$.

Μετάδοση σφαλμάτων στρογγύλευσης κατά τις πράξεις.
Έστω $*$ μια από τις 4 πράξεις $\{+,-,*,:\}$. Τότε για τον υπολογισμό της $x*y$ υπολογίζουμε: $fl(fl(x)*fl(y))$

Παράδειγμα Έστω $\beta=10$, $t=3$, $t=U=10$
Προσθέτουμε τους $x=123.45$ κ' $y=12.345$

$fl(fl(x)+fl(y))=fl(.123\times10^3+ \quad .123\times10^2)=fl(.123\times10^3+$
$.0123\times10^3)=fl(.1353\times10^3)=.135\times10^3$

$\boxed{x+y=.135795\times10^3}$, $fl(.135795\times10^3)=.136\times10^3$

Πολλαπλασιασμός
Το σχετικό σφάλμα της παράστασης του $x\neq0$ σε αριθμό μηχανής είναι: $\varepsilon=\dfrac{fl(x)-x}{x} \Leftrightarrow fl(x)=x+\varepsilon x=x(1+\varepsilon)$.

Έστω $fl(x)=x(1+\varepsilon_1)$ και $fl(y)=y(1+\varepsilon_2)$, $|\varepsilon_1|\le u$, $|\varepsilon_2|\le u$, $|\varepsilon_3|\le u$.
• $fl(fl(x)\cdot fl(y))=fl(x(1+\varepsilon_1)\cdot y(1+\varepsilon_2))=x\cdot y(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$
$=x\cdot y(1+\varepsilon)^3$ για κάποιο ε τ.ω. $|\varepsilon|\le u$. (το ε έχει την ίδια ιδιότητα με τα $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$)

$(1-u)^3\le(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\le(1+u)^3$
Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής της συνάρτησης $(1+x)^3$ λόγω συνέχειας θα υπάρχει $\varepsilon\in[-u,u]$ τ.ω. $(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)=(1+\varepsilon)^3$.

$$\left|\frac{fl(fl(x)\cdot fl(y))-x\cdot y}{x\cdot y}\right|=\left|\frac{xy(1+\varepsilon)^3-xy}{xy}\right|=\left|(1+\varepsilon)^3-1\right|=|3\varepsilon+3\varepsilon^2+\varepsilon^3|$$

$\le 3|\varepsilon|+3|\varepsilon^2|+|\varepsilon^3|\le 3u+3u^2+u^3\approx 3u$, διότι $u\ll1\Leftrightarrow u^2\ll u$.